



## Algorithms for verification and computation of strong Nash equilibria

**Stefano Paladino**

Relatore: Nicola Gatti

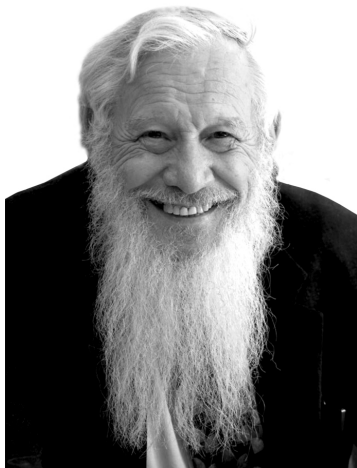
3 Ottobre 2014

- Teoria matematica dei giochi

- Teoria matematica dei giochi
- Interazione strategica tra agenti razionali

- Teoria matematica dei giochi
- Interazione strategica tra agenti razionali
- Concetti di soluzione

- Teoria matematica dei giochi
- Interazione strategica tra agenti razionali
- Concetti di soluzione
- Aspetti computazionali

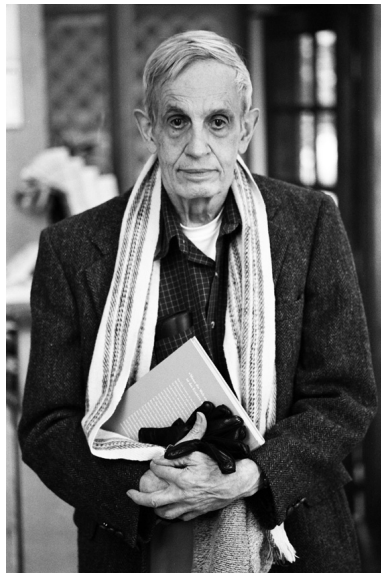


Robert Aumann  
Premio Nobel 2005

Strong Nash Equilibrium

Jonh Nash  
Premio Nobel 1994

Nash Equilibrium



## Equilibrio Strong Nash (SNE)

*Un profilo di strategie è un equilibrio strong Nash se:*

- (i) è un equilibrio di Nash,*
- (ii) è Pareto efficiente.*



## (i) Equilibrio di Nash

### Equilibrio di Nash (NE)

*Un profilo di strategie rispetto al quale nessun giocatore ha interesse ad essere l'unico a cambiare strategia è un equilibrio di Nash.*

## (i) Equilibrio di Nash

### Equilibrio di Nash (NE)

*Un profilo di strategie rispetto al quale nessun giocatore ha interesse ad essere l'unico a cambiare strategia è un equilibrio di Nash.*

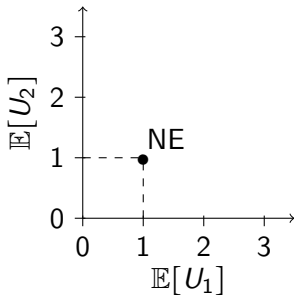
		agente 2	
		a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>
agente 1	a <sub>1</sub>	2, 2	0, 3
	a <sub>2</sub>	3, 0	1, 1

## (i) Equilibrio di Nash

### Equilibrio di Nash (NE)

*Un profilo di strategie rispetto al quale nessun giocatore ha interesse ad essere l'unico a cambiare strategia è un equilibrio di Nash.*

		agente 2	
		a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>
agente 1	a <sub>1</sub>	2, 2	0, 3
	a <sub>2</sub>	3, 0	1, 1



## (ii) Pareto efficienza

### Pareto Efficienza (PE)

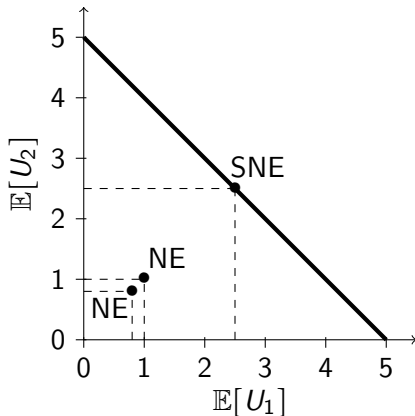
*Un profilo di strategie è Pareto efficiente se non si può migliorare la condizione di un giocatore senza peggiorare la condizione di un altro.*

## (ii) Pareto efficienza

### Pareto Efficienza (PE)

*Un profilo di strategie è Pareto efficiente se non si può migliorare la condizione di un giocatore senza peggiorare la condizione di un altro.*

		agente 2		
		a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>6</sub>
agente 1	a <sub>1</sub>	5, 0	0, 5	0, 0
	a <sub>2</sub>	0, 5	5, 0	0, 0
	a <sub>3</sub>	0, 0	0, 0	1, 1



## Complessità

- Ricerca NE:  $\mathcal{PPAD}$ -completo

## Complessità

- Ricerca NE:  $\mathcal{PPAD}$ -completo
- Ricerca PE:  $\mathcal{FP}$

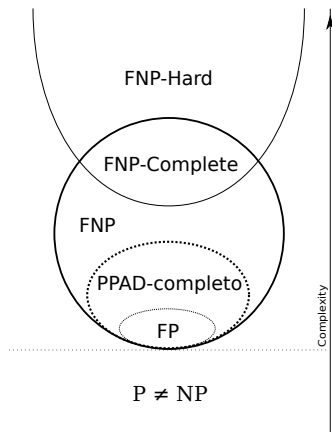
## Complessità

- Ricerca NE:  $\mathcal{PPAD}$ -completo
  - Ricerca PE:  $\mathcal{FP}$
- } Ricerca SNE:  $\mathcal{FNP}$ -completo



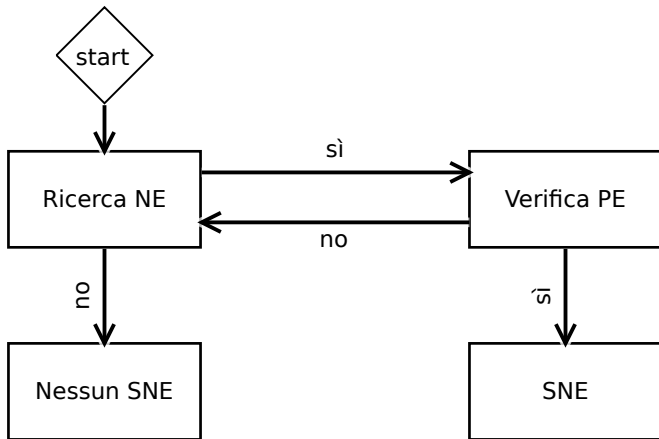
## Complessità

- Ricerca NE:  $\mathcal{PPAD}$ -completo
  - Ricerca PE:  $\mathcal{FP}$
- } Ricerca SNE:  $\mathcal{FNP}$ -completo



## Complessità

- Ricerca NE:  $PPAD$ -completo
  - Ricerca PE:  $FP$
- } Ricerca SNE:  $NP$ -completo



## Algoritmo per la verifica della PE

**Input** matrice del gioco, profilo di strategie da verificare,  
numero giocatori

**Output** è pareto efficiente? SÌ/NO

## Algoritmo per la verifica della PE

**Input** matrice del gioco, profilo di strategie da verificare,  
numero giocatori

**Output** è pareto efficiente? SÌ/NO

Complessità:  $\mathcal{P}$  [Gatti *et al.*, 2013]

## Algoritmo per la verifica della PE

**Input** matrice del gioco, profilo di strategie da verificare,  
numero giocatori

**Output** è pareto efficiente? SÌ/NO

Complessità:  $\mathcal{P}$  [Gatti *et al.*, 2013]

Enumerazione sottomatrici:  $\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_n$

## Algoritmo per la verifica della PE

**Input** matrice del gioco, profilo di strategie da verificare,  
numero giocatori

**Output** è pareto efficiente? SÌ/NO

Complessità:  $\mathcal{P}$  [Gatti *et al.*, 2013]

Enumerazione sottomatrici:  $\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_n$

Problema di Geometria Algebrica Reale: formula di Tarski

## Algoritmo per la verifica della PE

**Input** matrice del gioco, profilo di strategie da verificare,  
numero giocatori

**Output** è pareto efficiente? SÌ/NO

Complessità:  $\mathcal{P}$  [Gatti *et al.*, 2013]

Enumerazione sottomatrici:  $\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_n$

Problema di Geometria Algebrica Reale: formula di Tarski

Solvers  $\rightarrow$  Mathematica, Matlab, Maple (SyNRAC), QEPCAD.

## Algoritmo per la verifica della PE

**Input** matrice del gioco, profilo di strategie da verificare,  
numero giocatori

**Output** è pareto efficiente? SÌ/NO

Complessità:  $\mathcal{P}$  [Gatti *et al.*, 2013]

Enumerazione sottomatrici:  $\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_n$

Problema di Geometria Algebrica Reale: formula di Tarski

Solvers  $\rightarrow$  Mathematica, Matlab, Maple (SyNRAC), QEPCAD.

Complessità singolo problema:  $L^{O(1)} \cdot (n+1)^{O(n^2)} \cdot m^{n^2+n}$



## Algoritmo per la verifica della PE

**Input** matrice del gioco, profilo di strategie da verificare,  
numero giocatori

**Output** è pareto efficiente? SÌ/NO

Complessità:  $\mathcal{P}$  [Gatti *et al.*, 2013]

Enumerazione sottomatrici:  $\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_n$

Problema di Geometria Algebrica Reale: formula di Tarski

Solvers  $\rightarrow$  Mathematica, Matlab, Maple (SyNRAC), QEPCAD.

Complessità singolo problema:  $L^{O(1)} \cdot (n+1)^{O(n^2)} \cdot m^{n^2+n}$

Risultati: inaccettabili con 3 giocatori, 3 azioni ( $> 3$  ore)

## Algoritmo per la verifica della PE

**Input** matrice del gioco, profilo di strategie da verificare,  
numero giocatori

**Output** è pareto efficiente? SÌ/NO

Strumenti di Global Optimization

## Algoritmo per la verifica della PE

**Input** matrice del gioco, profilo di strategie da verificare,  
numero giocatori

**Output** è pareto efficiente? SÌ/NO

Strumenti di Global Optimization → Termination Tolerance

## Algoritmo per la verifica della PE

**Input** matrice del gioco, profilo di strategie da verificare,  
numero giocatori

**Output** è pareto efficiente? SÌ/NO

Strumenti di Global Optimization → Termination Tolerance

Solvers → SCIP, BARON

## Algoritmo per la verifica della PE

**Input** matrice del gioco, profilo di strategie da verificare,  
numero giocatori

**Output** è pareto efficiente? SÌ/NO

Strumenti di Global Optimization → Termination Tolerance

Solvers → SCIP, BARON

Problema completo: intera matrice di gioco

## Algoritmo per la verifica della PE

**Input** matrice del gioco, profilo di strategie da verificare, numero giocatori

**Output** è pareto efficiente? SÌ/NO

Strumenti di Global Optimization → Termination Tolerance

Solvers → SCIP, BARON

Problema completo: intera matrice di gioco

Complessità: *esponenziale*

## Algoritmo per la verifica della PE

**Input** matrice del gioco, profilo di strategie da verificare, numero giocatori

**Output** è pareto efficiente? SÌ/NO

Strumenti di Global Optimization → Termination Tolerance

Solvers → SCIP, BARON

Problema completo: intera matrice di gioco

Complessità: *esponenziale*

Risultati: fino a 10 giocatori, 50 azioni in 5 minuti!

Due algoritmi di enumerazione degli equilibri di Nash:

- spatial branch & bound
- enumerazione supporti



## Algoritmo: Spatial B&B

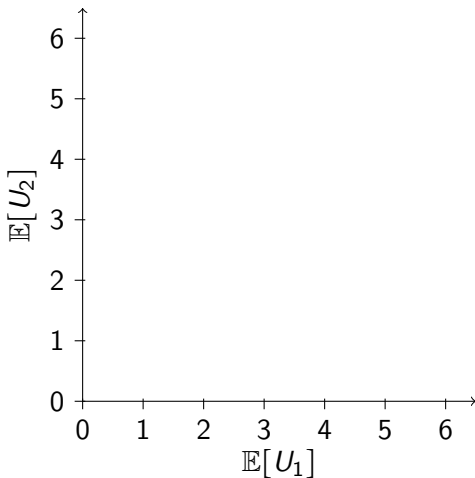
- 1 Oracolo per l'equilibrio di Nash:  
Mixed Integer Programming (MIP)

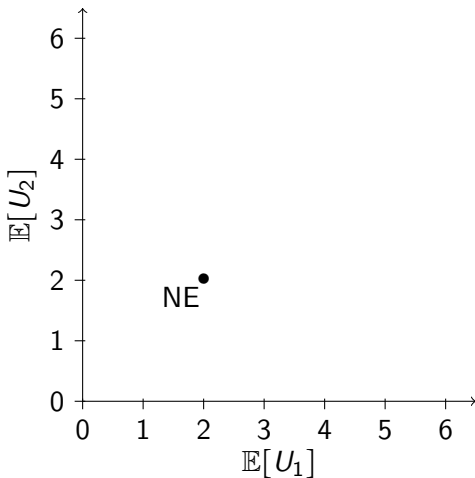
## Algoritmo: Spatial B&B

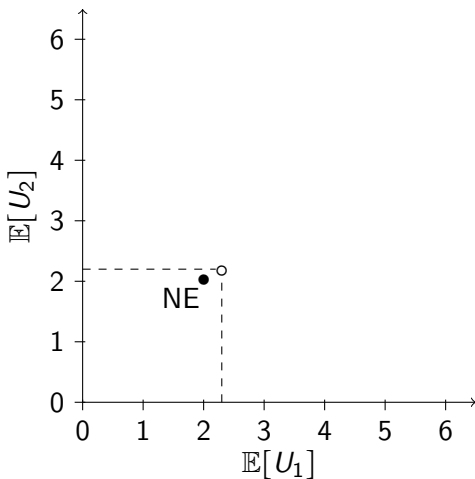
- 1 Oracolo per l'equilibrio di Nash:  
Mixed Integer Programming (MIP)  $\rightarrow$   $\mathcal{NP}$ -completo

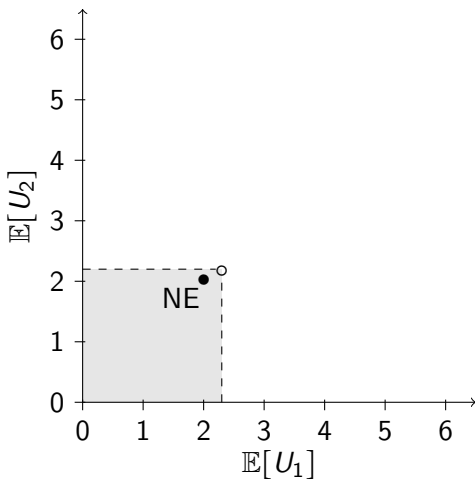
## Algoritmo: Spatial B&B

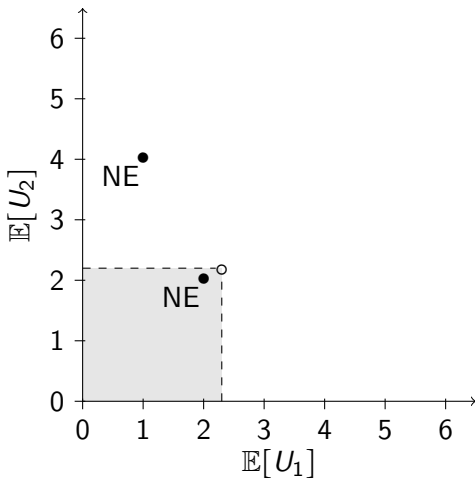
- 1 Oracolo per l'equilibrio di Nash:  
Mixed Integer Programming (MIP)  $\rightarrow$   $\mathcal{NP}$ -completo
- 2 Verifica della Pareto efficienza



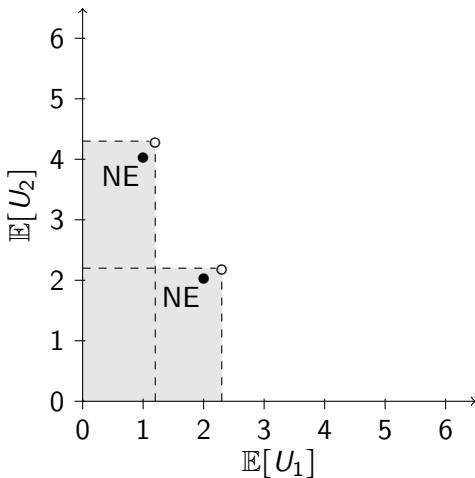




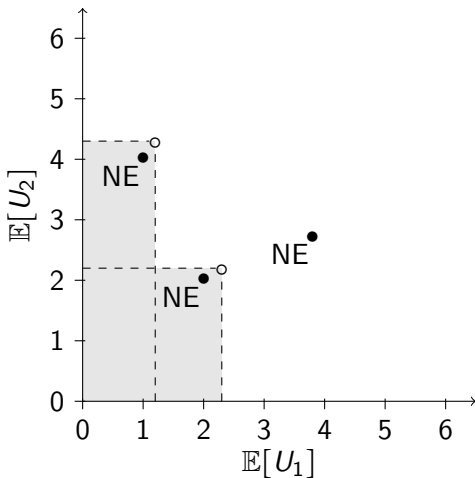


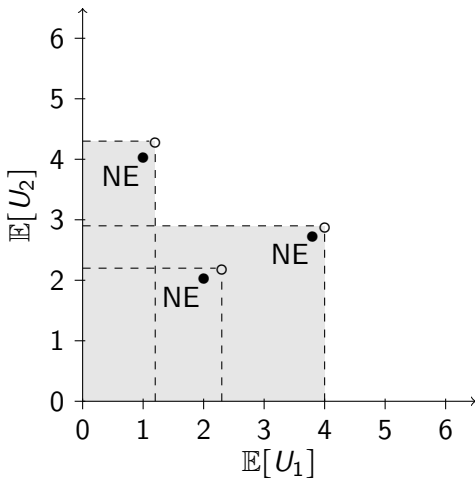




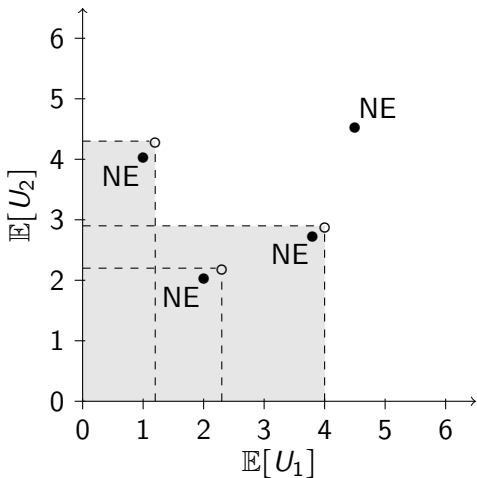


# Algoritmo: Spatial B&B

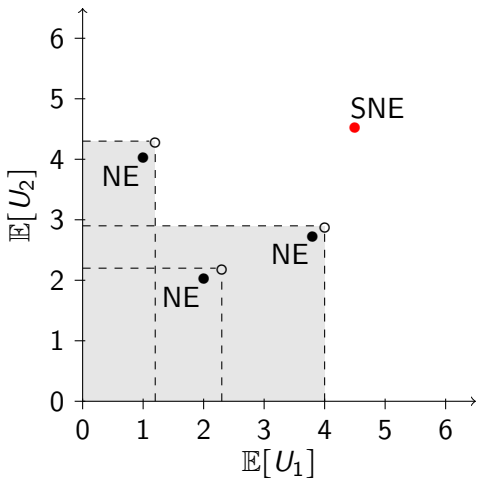




## Algoritmo: Spatial B&amp;B



# Algoritmo: Spatial B&B



Euristiche: aggiunta di funzione obiettivo al MIP

Euristiche: aggiunta di funzione obiettivo al MIP  $\rightarrow \max u_1 + u_2$

## Algoritmo: Enumerazione supporti

### Definizione supporto

*Insieme delle azioni giocate con probabilità strettamente positiva da un giocatore.*



## Algoritmo: Enumerazione supporti

### Definizione supporto

*Insieme delle azioni giocate con probabilità strettamente positiva da un giocatore.*

- 1 Enumerazione supporti e verifica proprietà di Nash:  
Porter-Nudelman-Shoham, 2004

## Algoritmo: Enumerazione supporti

### Definizione supporto

*Insieme delle azioni giocate con probabilità strettamente positiva da un giocatore.*

- 1 Enumerazione supporti e verifica proprietà di Nash:  
Porter-Nudelman-Shoham, 2004
- 2 Verifica della Pareto efficienza

## Algoritmo: Enumerazione supporti

### Definizione supporto

*Insieme delle azioni giocate con probabilità strettamente positiva da un giocatore.*

- 1 Enumerazione supporti e verifica proprietà di Nash:  
Porter-Nudelman-Shoham, 2004  $\rightarrow$  caso pessimo:  $4^n$  supporti
- 2 Verifica della Pareto efficienza

## Generatori di giochi

Tre diversi generatori:

- GAMUT

## Generatori di giochi

Tre diversi generatori:

- ~~GAMUT~~

## Generatori di giochi

Tre diversi generatori:

- ~~GAMUT~~
- SAT

## Generatori di giochi

Tre diversi generatori:

- ~~GAMUT~~
- SAT → Conitzer, Sandholm, 2008

## Generatori di giochi

Tre diversi generatori:

- ~~GAMUT~~
- ~~SAT~~ → Conitzer, Sandholm, 2008



## Generatori di giochi

Tre diversi generatori:

- ~~GAMUT~~
- ~~SAT~~ → Conitzer, Sandholm, 2008
- MISSING

## Generatori di giochi

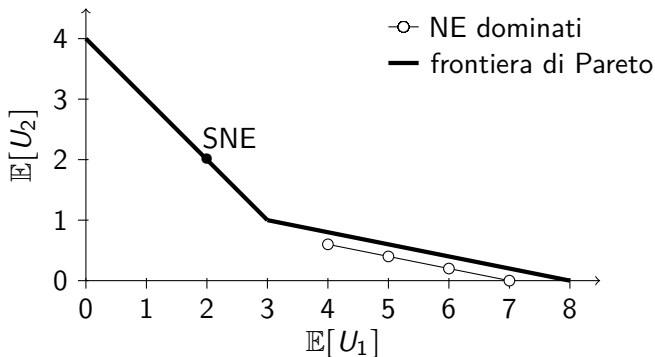
Tre diversi generatori:

- ~~GAMUT~~
- ~~SAT~~ → Conitzer, Sandholm, 2008
- MISSING → rilanci esponenziali dell'oracolo MIP

## Generatori di giochi

Tre diversi generatori:

- ~~GAMUT~~
- ~~SAT~~ → Conitzer, Sandholm, 2008
- MISSING → rilanci esponenziali dell'oracolo MIP



Spatial B&B

VS

Enumerazione supporti

Spatial B&B

VS

Enumerazione supporti



2 giocatori, 84 azioni



2 giocatori, 20 azioni

## Risultati

Spatial B&B



2 giocatori, 84 azioni

VS

~~Enumerazione supporti~~



2 giocatori, 20 azioni

## Risultati

Spatial B&B



2 giocatori, 84 azioni

3 giocatori, 20 azioni

4 giocatori, 9 azioni

VS

~~Enumerazione supporti~~



2 giocatori, 20 azioni

## 2 giocatori

Azioni	Iterazioni	Oracolo NE	Verifica PE
4	0	0.0405 s	0.04 s
8	0	0.18 s	0.43 s
18	1	0.43 s	184 s
29	0	0.52 s	241.2 s
31	25	3.66 s	327.1 s
46	39	5.01 s	887.33 s
56	49	6.81 s	1143.59 s
76	68	11.81 s	4347.37 s
84	76	20.55 s	4388.14 s
85	77	–	> 3 h



## 2 giocatori

Azioni	Iterazioni	Oracolo NE	Verifica PE
4	0	0.0405 s	0.04 s
8	0	0.18 s	0.43 s
18	1	0.43 s	184 s
29	0	0.52 s	241.2 s
31	25	3.66 s	327.1 s
46	39	5.01 s	887.33 s
56	49	6.81 s	1143.59 s
76	68	11.81 s	4347.37 s
84	76	20.55 s	4388.14 s
85	77	-	> 3 h

- SNE in strategie correlate?

## Lavori futuri

- SNE in strategie correlate?
- SNE nei giochi a grafo?

Grazie per l'attenzione!

Powered by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

Perchè non posso scrivere un unico problema che racchiuda i vincoli di NE e di PE?

Perchè non posso scrivere un unico problema che racchiuda i vincoli di NE e di PE?

Problema di ottimizzazione

Perchè non posso scrivere un unico problema che racchiuda i vincoli di NE e di PE?

Problema di ottimizzazione  $\longrightarrow$  Problema di ammissibilità

Perchè non posso scrivere un unico problema che racchiuda i vincoli di NE e di PE?

Problema di ottimizzazione  $\longrightarrow$  Problema di ammissibilità

Vincoli NE



Perchè non posso scrivere un unico problema che racchiuda i vincoli di NE e di PE?

Problema di ottimizzazione  $\longrightarrow$  Problema di ammissibilità

Vincoli NE ✓

## Appendice

Perchè non posso scrivere un unico problema che racchiuda i vincoli di NE e di PE?

Problema di ottimizzazione  $\rightarrow$  Problema di ammissibilità

Vincoli NE ✓  $\rightarrow$  dualità forte

## Appendice

Perchè non posso scrivere un unico problema che racchiuda i vincoli di NE e di PE?

Problema di ottimizzazione  $\rightarrow$  Problema di ammissibilità

Vincoli NE ✓  $\rightarrow$  dualità forte

Vincoli PE

## Appendice

Perchè non posso scrivere un unico problema che racchiuda i vincoli di NE e di PE?

Problema di ottimizzazione  $\rightarrow$  Problema di ammissibilità

Vincoli NE ✓  $\rightarrow$  dualità forte

Vincoli PE ✗

Perchè non posso scrivere un unico problema che racchiuda i vincoli di NE e di PE?

Problema di ottimizzazione  $\rightarrow$  Problema di ammissibilità

Vincoli NE ✓  $\rightarrow$  dualità forte

Vincoli PE ✗  $\rightarrow$  problema non convesso  $\rightarrow$  no dualità forte