# In Action with Math

## Competizione e Strategia: Teoria dei Giochi

Giulia Bernardi, Roberto Lucchetti

3 dicembre 2014

## Gioco in forma strategica

Due o più giocatori con un numero finito di mosse a disposizione. Per ogni possibile esito del gioco ci sono dei valori assegnati a ciascun giocatore.

Possiamo descriverlo usando:

- Insieme $X$ delle strategie del primo giocatore,
- insieme $Y$ delle strategie del secondo giocatore
- funzione di utilità del primo e del secondo giocatore: $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ e $g : X \times Y \to \mathbb{R}$.

### Due giocatori

Il primo giocatore gioca la strategia $x$, il secondo giocatore gioca la strategia $y$.
Se $f(x, y) = a$ e $g(x, y) = b$
allora il valore assegnato al primo giocatore è $a$, al secondo giocatore è $b$.

$$\begin{array}{cc} & y \\ & \downarrow \\ x \rightarrow & \begin{pmatrix} & & \\ & (a, b) & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

## Dilemma del prigioniero

Due persone vengono sospettate di aver commesso un reato molto grave. Il giudice fa ad entrambi questa proposta: se entrambi confesseranno avranno 5 anni in prigione per scontare la pena. Se confessa solo uno solo dei due, il primo sarà libero e il secondo sconterà una pena di 9 anni. Se nessuno dei due confessa, veranno accusati di reati minori e staranno in carcere per 2 anni.

## Dilemma del prigioniero

Due persone vengono sospettate di aver commesso un reato molto grave. Il giudice fa ad entrambi questa proposta: se entrambi confesseranno avranno 5 anni in prigione per scontare la pena. Se confessa solo uno solo dei due, il primo sarà libero e il secondo sconterà una pena di 9 anni. Se nessuno dei due confessa, veranno accusati di reati minori e staranno in carcere per 2 anni.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & NC \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ NC \end{array} & \begin{pmatrix} (5,5) & (0,9) \\ (9,0) & (2,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

$X = Y = \{Confessare, NonConfessare\}$
*L'esito del gioco è rappresentato dagli anni di prigione.*

## Battaglia dei sessi

Una coppia deve decidere se andare al cinema o a teatro, il primo giocatore preferisce il cinema, il secondo il teatro anche se entrambi preferiscono uscire insieme all'uscire da soli.

### Battaglia dei sessi

Una coppia deve decidere se andare al cinema o a teatro, il primo giocatore preferisce il cinema, il secondo il teatro anche se entrambi preferiscono uscire insieme all'uscire da soli.

$$\begin{pmatrix} (3,2) & (1,1) \\ (0,0) & (2,3) \end{pmatrix}$$

## Gioco del pollo

Due ragazzi si sfidano: correranno in macchina uno contro l'altro per provare chi dei due è più codardo e sterzerà per primo. Se entrambi sterzano sono considerati entrambi "polli" e non guadagnano nulla. Se uno solo sterza prende $-1$ per essere il più "pollo" e l'altro $+5$ per il coraggio. Se entrambi non sterzano moriranno ($-100$?)

## Gioco del pollo

Due ragazzi si sfidano: correranno in macchina uno contro l'altro per provare chi dei due è più codardo e sterzerà per primo. Se entrambi sterzano sono considerati entrambi "polli" e non guadagnano nulla. Se uno solo sterza prende $-1$ per essere il più "pollo" e l'altro $+5$ per il coraggio. Se entrambi non sterzano moriranno ($-100$?)

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (-1,5) \\ (5,-1) & (-100,-100) \end{pmatrix}$$

## Gioco della caccia

Una coppia di amici sta andando a caccia. Ognuno può decidere se andare a cacciare un cervo o una lepre, ogni cacciatore può catturare da solo la lepre, invece per catturare il cervo deve esserci anche il suo compagno. Ovviamente è meglio catturare un cervo di una lepre.

## Gioco della caccia

Una coppia di amici sta andando a caccia. Ognuno può decidere se andare a cacciare un cervo o una lepre, ogni cacciatore può catturare da solo la lepre, invece per catturare il cervo deve esserci anche il suo compagno. Ovviamente è meglio catturare un cervo di una lepre.

$$\begin{pmatrix} (5,5) & (0,1) \\ (1,0) & (1,1) \end{pmatrix}$$

## Strategie dominate

Un giocatore ha una strategia **dominata** $x$ se qualsiasi sia la strategia degli altri giocatori, esiste una strategia $x_1$ che gli permette di guadagnare di più rispetto alla strategia $x$. Si dice che $x_1$ domina $x$.
Se la strategia $x$ dominata è del primo giocatore, avremo

$$f(x_1, y) > f(x, y)$$

per ogni strategia $y$ del secondo giocatore.

## Strategie dominate

Un giocatore ha una strategia **dominata** $x$ se qualsiasi sia la strategia degli altri giocatori, esiste una strategia $x_1$ che gli permette di guadagnare di più rispetto alla strategia $x$. Si dice che $x_1$ domina $x$.
Se la strategia $x$ dominata è del primo giocatore, avremo

$$f(x_1, y) > f(x, y)$$

per ogni strategia $y$ del secondo giocatore.

Quali sono le strategie dominanti e quelle dominate in questo gioco?

$$\begin{pmatrix} (4,3) & (3,6) & (5,3) \\ (3,5) & (2,4) & (6,1) \end{pmatrix}$$

### Definizione (Equilibrio di Nash)

Dato il gioco $\{X, Y, f, g\}$ diremo che la coppia di strategie $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash se

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) &\geq f(x, \bar{y}) \text{ per ogni } x \in X \\ g(\bar{x}, \bar{y}) &\geq g(\bar{x}, y) \text{ per ogni } y \in Y \end{aligned}$$

Nessuno dei due giocatori ha incentivo a giocare una strategia diversa se l'altro giocatore sta giocando la strategia di equilibrio

### Teorema (Nash)

*Ogni gioco ammette almeno un equilibrio di Nash in strategie pure o miste.*

## Battaglia dei sessi

Se sapete che il primo giocatore andrà al cinema, dove andrete voi?

$$\begin{pmatrix} (3,2) & (1,1) \\ (0,0) & (2,3) \end{pmatrix}$$

## Battaglia dei sessi

Se sapete che il primo giocatore andrà al cinema, dove andrete voi?

$$\begin{pmatrix} (3,2) & (1,1) \\ (0,0) & (2,3) \end{pmatrix}$$

## Richiamare

Durante una telefonata cade la linea, ognuno dei due partecipanti può richiamare l'altro ma se entrambi si chiamano i telefoni risultano occupati.

Trovare gli equilibri di Nash in strategie pure nei giochi:

**Gioco del pollo**

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (-1,5) \\ (5,-1) & (-100,-100) \end{pmatrix}$$

**Gioco della caccia**

$$\begin{pmatrix} (5,5) & (0,1) \\ (1,0) & (1,1) \end{pmatrix}$$

## Principio di indifferenza

Consideriamo un gioco $2 \times 2$ e supponiamo che le strategie dell'equilibrio siano per il primo giocatore $(p, 1-p)$.
Se siamo all'**equilibrio**, il secondo giocatore ottiene dalla prima colonna lo stesso valore che ottiene dalla seconda. Possiamo così trovare il valore di $p$ e analogamente trovare le strategie all'equilibrio del secondo giocatore.
Possiamo usare il principio di indifferenza per cercare equilibri dove le strategie sono completamente miste.

$$\begin{pmatrix} (1,0) & (0,3) \\ (0,2) & (1,0) \end{pmatrix} \implies 3p = 2(1-p) \quad \to \quad p = \frac{2}{5}$$

$$q = 1 - q \quad \to \quad q = \frac{1}{2}$$

Trovare tutti gli equilibri di Nash nei giochi:

**Battaglia dei sessi**

$$\begin{pmatrix} (3,2) & (1,1) \\ (0,0) & (2,3) \end{pmatrix}$$

Trovare tutti gli equilibri di Nash nei giochi:
**Battaglia dei sessi**

$$\begin{pmatrix} (3,2) & (1,1) \\ (0,0) & (2,3) \end{pmatrix}$$

$$2p = p + 3(1-p) \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{3}{4}$$
$$3q + (1-q) = 2(1-q) \quad \Longrightarrow \quad q = \frac{1}{4}$$