In Action with Math

Competizione e Strategia: Teoria dei Giochi

Giulia Bernardi, Roberto Lucchetti

19 novembre 2014

Gioco a somma zero

Due giocatori, uno contro l'altro.
Il primo giocatore vince quello che il secondo perde e viceversa.

Esempi:

- Gioco del pari e dispari, chi perde paga un euro all'altro.
- La roulette russa

Gioco a somma zero

Due giocatori, uno contro l'altro.
Il primo giocatore vince quello che il secondo perde e viceversa.

Esempi:

- Gioco del pari e dispari, chi perde paga un euro all'altro.
- La roulette russa

Gioco a somma zero

Possiamo rappresentare un gioco a somma zero con una funzione:
$f : X \times Y \to \mathbb{R}$
Dove $x \in X$ è la scelta del primo giocatore, $y \in Y$ è la scelta del secondo giocatore e $f(x, y)$ è il valore che il secondo giocatore deve pagare al primo.

Esempio 1

Il primo giocatore sceglie un numero tra 0 e 1, il secondo sceglie un numero tra 0 e 2. La somma dei due numeri è la quantità che il secondo giocatore deve pagare al primo.
$X = [0, 1]$ e $Y = [0, 2]$
$f(x, y) = x + y$

Se foste il primo giocatore, cosa giochereste? E se foste il secondo?

Esempio 1

Il primo giocatore sceglie un numero tra 0 e 1, il secondo sceglie un numero tra 0 e 2. La somma dei due numeri è la quantità che il secondo giocatore deve pagare al primo.
$X = [0, 1]$ e $Y = [0, 2]$
$f(x, y) = x + y$

Se foste il primo giocatore, cosa giochereste? E se foste il secondo?

Esempio 2

Questa volta il primo giocatore vince il prodotto tra i due numeri.

Ogni giocatore indica un numero con le dita della mano. La somma dei due numeri viene vinta dal primo giocatore e pagata dal secondo.

Ogni giocatore indica un numero con le dita della mano. La somma dei due numeri viene vinta dal primo giocatore e pagata dal secondo.

Come rappresentare questo gioco?

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Come si rappresenta il gioco?

Il primo giocatore gioca la strategia x, il secondo giocatore gioca la strategia y.
Il valore vinto dal primo giocatore è $f(x, y)$.

$$\begin{array}{cc} & x \\ & \downarrow \\ y \rightarrow & \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & f(x,y) & \\ & & \end{array} \right) \end{array}$$

Consideriamo il gioco:

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 \\ 5 & 9 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Se siete il primo giocatore, quanto siete sicuri di poter vincere?
Se siete il secondo giocatore, quanto siete disposti a pagare?
Quali righe/colonne giochereste?

Valori conservativi

Il primo giocatore sceglie una strategia $\overline{x}$ che gli permetta di ottenere almeno v.
Il secondo giocatore sceglie una strategia $\overline{y}$ che non gli faccia perdere più di v.

$$f(\overline{x}, y) \geq v \quad \forall y$$
$$f(x, \overline{y}) \leq v \quad \forall x$$

$$\implies f(\overline{x}, \overline{y}) = v$$

Valori conservativi

Quali sono i valori conservativi nel gioco rappresentato da questa matrice?

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 & 5 & 20 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 6 \\ 9 & 5 & 9 & 5 & 9 \\ 13 & 0 & 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

Valori conservativi

Quali sono i valori conservativi nel gioco rappresentato da questa matrice?

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 & 5 & 20 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 6 \\ 9 & 5 & 9 & 5 & 9 \\ 13 & 0 & 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

Gli equilibri possono essere anche più di uno!

Sasso, carta, forbice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E in questo caso?
Se il vostro avversario gioca sempre forbice, cosa giocate?

Teorema (Von Neumann)

Un gioco finito, tra due persone, a somma zero ammette sempre un equilibrio in strategie miste.

Principio di indifferenza

Consideriamo un gioco 2×2 e supponiamo che le strategie dell'equilibrio siano per il primo giocatore $(p, 1-p)$.
Se siamo all'**equilibrio**, il secondo giocatore ottiene dalla prima colonna lo stesso valore che ottiene dalla seconda. Possiamo così trovare il valore di p e analogamente trovare le strategie all'equilibrio del secondo giocatore.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow p-(1-p) \;=\; -p+(1-p)$$

$$p = \frac{1}{2}$$

Esempio

Alice ha un asso rosso e un 4 nero. Bruno ha un 3 rosso e un 2 nero. Devono scoprire contemporaneamente una delle loro carte, se le carte hanno lo stesso colore Bruno vince la somma dei valori mostrati, se hanno due colori diversi Alice vince la somma dei valori mostrati.

Esempio

Alice ha un asso rosso e un 4 nero. Bruno ha un 3 rosso e un 2 nero. Devono scoprire contemporaneamente una delle loro carte, se le carte hanno lo stesso colore Bruno vince la somma dei valori mostrati, se hanno due colori diversi Alice vince la somma dei valori mostrati.

$$\begin{pmatrix} -4 & +3 \\ +7 & -6 \end{pmatrix}$$

Esempio

Alice ha un asso rosso e un 4 nero. Bruno ha un 3 rosso e un 2 nero. Devono scoprire contemporaneamente una delle loro carte, se le carte hanno lo stesso colore Bruno vince la somma dei valori mostrati, se hanno due colori diversi Alice vince la somma dei valori mostrati.

$$\begin{pmatrix} -4 & +3 \\ +7 & -6 \end{pmatrix}$$

$$-4p + 7(1-p) = 3p - 6(1-p) \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{13}{20}$$

$$-4q + 3(1-q) = 7q - 6(1-q) \quad \Longrightarrow \quad q = \frac{9}{20}$$