

Cos'è la teoria dei giochi e come può esservi utile

Giulia Bernardi

Politecnico di Milano

4 novembre 2015

Gioco(dizionario)

Pratica consistente in una competizione fra due o più persone, regolata da norme convenzionali, e il cui esito dipende in maggiore o minor misura dall'abilità dei singoli contendenti e dalla fortuna.



Gioco

I **giochi** sono una situazione in cui due o più persone

- interagiscono, seguendo delle regole
- dopo un certo numero di mosse arrivano a uno stato finale, che dipende dalle scelte di tutti
- hanno delle preferenze rispetto a tutti gli esiti possibili



Il **gioco** è un modello per rappresentare le situazioni della vita quotidiana.

Teoria dei giochi o teoria delle decisioni interattive

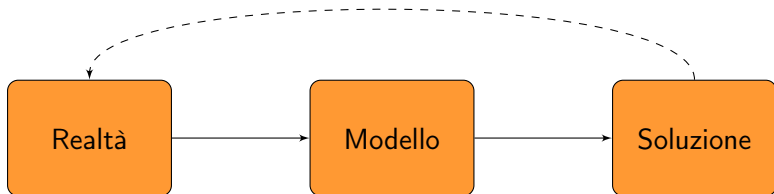
1944 - Von Neumann e Morgenstern
"Theory of Games and Economic Behaviour"

Applicazioni:

- Economia
- Scienze sociali
- Informatica
- Biologia
- Medicina...

Nobel:

- 1994 Harsanyi, Nash, Selten
- 2005 Aumann, Schelling
- 2007 Hurwicz, Maskin, Myerson
- 2012 Shapley, Roth



Gioco non cooperativo

non c'è collaborazione tra i giocatori

- dilemma del prigioniero
- scacchi, dama...

Gioco cooperativo

ci sono accordi vincolanti tra i giocatori

- spese comuni
- organi di governo

Diversi concetti di soluzione a seconda delle caratteristiche del gioco

Ipotesi sul comportamento dei giocatori:

- razionali
 - capiscono le regole del gioco
 - costruiscono una **funzione di utilità** associata alle loro preferenze
 - fanno un'analisi completa del gioco
 - utilizzano strumenti matematici
 - ...
- egoisti
 - l'obiettivo è **massimizzare la propria funzione di utilità**
 - preferenze altrui considerate solo per studiare le loro scelte

Offerta

Un padre offre cento euro al figlio, a patto che lui li divida con la sorella (offrendole almeno un euro) e lei accetti la proposta.

Quanto offrireste e quanto accettereste?



Giochi finiti a informazione perfetta

Ogni giocatore sa quali sono state le mosse precedenti e quali sono le possibili mosse future sia sue che di tutti gli altri giocatori.

Rappresentazione con un **albero** → tutte le possibili mosse, un giocatore dopo l'altro, tutti i possibili esiti.

Risolvere con **induzione a ritroso** → dall'ultimo livello si risale al primo individuando ad ogni passaggio la strategia ottimale per il giocatore che deve decidere

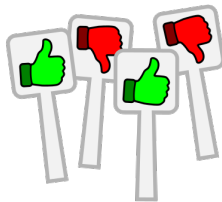
Tre politici

Tre politici devono votare una legge per tagliare i loro stipendi. Ognuno di loro preferirebbe che la legge non passasse, ma vorrebbe votare favorevolmente per fare bella figura con l'elettorato. La legge viene approvata se almeno due politici votano favorevolmente, i politici voteranno pubblicamente uno dopo l'altro.

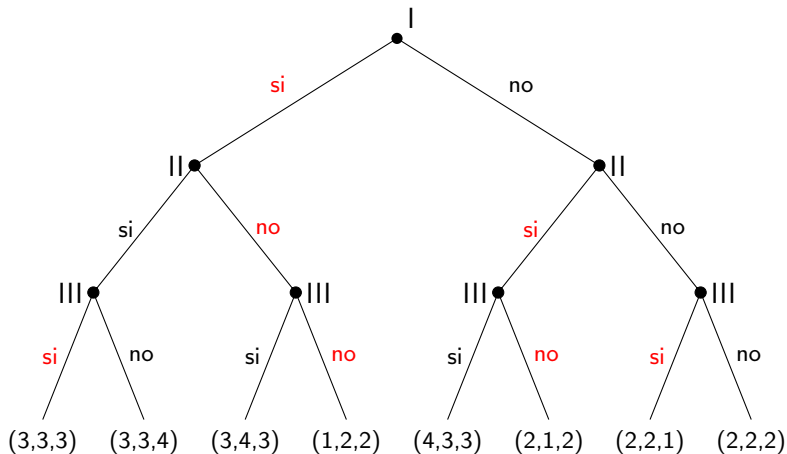
Meglio votare per primi, secondi o per terzi?

Le preferenze sui possibili esiti:

- 1 dire di Sì ma la legge non passa
- 2 dire di No ma la legge non passa
- 3 dire di Sì e la legge passa
- 4 dire di No e la legge passa.



- 1 Si ma non passa
- 2 No e non passa
- 3 Si e passa
- 4 No e passa.



Tv Show

In un gioco televisivo i due concorrenti devono scrivere in un messaggio segreto una delle seguenti opzioni

- dammi 1000 euro
- dai all'altro concorrente 4000 euro.

Il presentatore legge i messaggi e premia i giocatori come è scritto sui biglietti.

Cosa scrivereste?

$$\begin{pmatrix} (1000, 1000) & (5000, 0) \\ (0, 5000) & (4000, 4000) \end{pmatrix}$$

Equilibrio di Nash

Coppia di strategie che individuano un equilibrio del gioco: nessuno dei due giocatori ha un incentivo a giocare una strategia diversa.

- è un punto stabile
- può non essere unico
- può non essere la soluzione migliore nel complesso
- quanto è razionale l'altro giocatore?

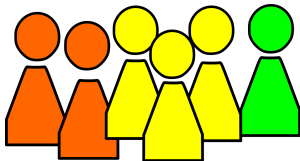
Giochi cooperativi

Accordi vincolanti tra i giocatori, che possono formare coalizioni.
Ad ogni coalizione viene associato un valore numerico.

N insieme dei giocatori

2^N insieme delle coalizioni

il gioco è dato da una funzione: $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$



Soluzione

Come dividere tra i giocatori il valore del gioco.

Giochi a maggioranza

$$v = [q; w_1, w_2, \dots, w_n] \quad v(T) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{i \in T} w_i \geq q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

q è la quota di maggioranza e w_i è il numero di rappresentanti
 Superare la maggioranza \implies coalizione vincente



Indice di Banzhaf

$$\beta_i(v) = \#\{\text{coalizioni perdenti che vincono se } i \text{ si unisce a loro}\}$$

$$v_{2015} = [161; 113, 48, 36, 12, 36, 12, 31, 14, 19]$$

Partito	2013		2015		Partito
	Seggi %	Banzhaf	Seggi %	Banzhaf	
PD	34	32.1	35	53	
PdL	28	25	16	10.5	Forza Italia
			11	9.5	Area popolare
Scelta Civica	6	5.6	4	2.5	Conservatori
5 Stelle	16	23.3	11	9.5	
Lega Nord	5	3.5	4	2.5	
Misto	5	3.5	10	6.5	
Grandi Autonomie	3	3.5	4	2.5	
Per le Autonomie	3	3.5	6	3.5	

Taxi

Tre amici stanno andando alla stessa festa che pensano di raggiungere in taxi. I costi della corsa per ognuno di loro e ogni possibile gruppo sono:

Ale=10€

Bob = 10€

GiuliaC = 14€

Tutti insieme =20€

Ale&Bob = 12€

Ale&GiuliaC = 18€

Bob&GiuliaC = 18€



Ma come possono dividere il costo della corsa?

Gioco

Ale = Bob = 10

GiuliaC = 14

Tutti insieme = 20

Ale&Bob = 12

Ale&GiuliaC = 18

Bob&GiuliaC = 18

	A	B	C
ABC	10	2	8
ACB	10	2	8
BAC	2	10	8
BCA	2	10	8
CAB	4	2	14
CBA	2	4	14
Shapley	30/6	30/6	60/6

Gioco

 $Ale = Bob = 10$ $GiuliaC = 14$ $Tutti\ insieme = 20$ $Ale\&\ Bob = 12$ $Ale\&\ GiuliaC = 18$ $Bob\&\ GiuliaC = 18$

Shapley

Ale: 5€

Bob: 5€

GiuliaC: 10€

- conveniente per ognuno
- efficiente
- simmetrico



Il gioco del matrimonio

In un villaggio ci sono un gruppo di ragazzi e di ragazze in età da matrimonio. Il capovillaggio deve sposare i giovani e il suo obiettivo è creare delle coppie stabili, ovvero assicurarsi che dopo aver celebrato i matrimoni non ci saranno tradimenti.

A:	D	F	E
B:	E	D	F
C:	E	F	D

D:	A	B	C
E:	A	C	B
F:	C	A	B



(A, D) (B, F) (C, E)



Ron Howard.

A beautiful mind.

DreamWorks Pictures, 2001.



Roberto Lucchetti.

Scacchi e scimpanzé, matematica per giocatori razionali.

Bruno Mondadori, 2012.



Fioravante Patrone.

Decisori (razionali) interagenti: una introduzione alla teoria dei giochi.

PLUS-Pisa University Press, 2006.



Game Theory and Computation Group.

www.gametheory.polimi.it.

Politecnico di Milano.

*I use game theory to help myself understand
conflict situations and opportunities.*

Thomas Schelling

Grazie,

giulia.bernardi@polimi.it