In Action With Math

Competizione e Strategia - Teoria dei Giochi

Roberto Lucchetti - Giulia Bernardi

Politecnico di Milano
www.gametheory.polimi.it

18 novembre 2015

Giochi cooperativi

Gli accordi dei giocatori sono **vincolanti**

- suddivisione spese comuni
- accordi tra compratori e venditori
- organi di governo...

Definizione

Un gioco cooperativo è descritto da una coppia (N, v) dove

- N è l'insieme dei giocatori
- $v : 2^N \to \mathbb{R}$ è la funzione di utilità del gioco.

Ad ogni coalizione (i.e. sottoinsieme di N) si associa un valore numerico.

Esempio #1

Due venditori e un compratore

Ci sono due persone che vogliono vendere lo stesso tipo di macchina e una persona disponibile ad acquistarla.

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1,2\}) = 0$$
$$v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = 1$$

Due compratori e un venditore

Una persona vuole vendere un oggetto e stima il suo valore a, due persone sono disposte a comprarlo pagandolo b e c.

$$v(\emptyset) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0$$
$$v(\{1\}) = a \quad v(\{1,2\}) = b \quad v(\{1,3\}) = v(N) = c$$

Esempio #2

Gioco di maggioranza

In un'azienda ci sono tre azionisti, il primo ha il 50% delle quote, il secondo il 49% e il terzo solo l'1%. Una decisione viene approvata se i soci che la sostengono superano la maggioranza delle quote.

Coalizioni vincenti $v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1$
Coalizioni perdenti $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0$

$$v = [q; w_1, w_2, \ldots, w_n] \qquad v(T) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{i \in T} w_i \geq q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Superare la maggioranza $\implies$ coalizione vincente

Soluzione

Per un gioco cooperativo la **soluzione** è un vettore $(x_1, x_2, \dots x_n)$ che propone una distribuzione della utilità (o dei costi, o del potere) tra i giocatori.

Esempi

- dividere delle spese $\rightarrow$ quanto ciascuno deve pagare
- gestire una bancarotta $\rightarrow$ quanto rimborsare ad ogni creditore
- organi di governo $\rightarrow$ valutare il potere di ogni rappresentante

Nucleo

Proprietà da richiedere ad un concetto di soluzione $(x_1, \ldots, x_n)$:

- soddisfazione individuale
- soddisfazione collettiva
- efficienza: $x_1 + \cdots + x_n = v(N)$

Nucleo

$$(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ e } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ per ogni insieme } S$$

Esempio #1

Due venditori e un compratore

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1,2\}) = 0$$
$$v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = 1$$

Condizioni per trovare il nucleo

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \geq 0 \qquad x_2 + x_3 \geq 1 \qquad x_1 + x_3 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$Nucleo = \{(0,0,1)\}$$

Esempio #1

Un venditore e due compratori

$$v(\emptyset) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0$$
$$v(\{1\}) = a \quad v(\{1,2\}) = b \quad v(\{1,3\}) = v(N) = c$$

Condizioni per trovare il nucleo

$$\begin{array}{ccc} x_1 \geq a & & x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq b & x_2 + x_3 \geq 0 & x_1 + x_3 \geq c \\ & x_1 + x_2 + x_3 = c & \end{array}$$

$$Nucleo = \Big\{(p, 0, c-p) \text{ con } b \leq p \leq c\Big\}$$

Individua il prezzo p di vendita (che dipende anche dalle valutazioni del giocatore 2).

Indici di potere

Indice di Banzhaf

$$\beta_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{n-1}} [v(S \cup i) - v(S)]$$

$$\beta_i(v) = \frac{\#\text{coalizioni perdenti che vincono se } i \text{ si unisce a loro}}{\#\text{tutte le coalizioni che non contengono } i}$$

Esempio #2

Gioco di maggioranza

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0$$
$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(N) = 1$$

Coalizioni che vincono se 1 si unisce a loro: $\{2\}, \{3\}, \{2,3\}$
Coalizioni che vincono se 2 si unisce a loro: $\{1\}$
Coalizioni che vincono se 3 si unisce a loro: $\{1\}$

$$\beta = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$$

Valore Shapley

Valore Shapley

$$\sigma_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S \cup i) - v(S)]$$

Le coalizioni si formano seguendo l'ordine di arrivo dei giocatori:

- tutti gli ordini sono equiprobabili
- quando il giocatore i si unisce alla coalizione S porta il suo *contributo marginale*

Airport Game

Aeroporto

Tre diverse compagnie aeree sono interessate a costruire una nuova pista di atterraggio. La prima compagnia ha bisogno solo di 1km di pista il cui costo di realizzazione sarebbe c_1, la seconda compagnia di 1,5 km al costo c_2, mentre la terza di 2 km al costo c_3.

$$
\begin{array}{ccc}
v(\emptyset) = 0 & & v(N) = c_3 \\
v(\{1\}) = c_1 & v(\{2\}) = c_2 & v(\{3\}) = c_3 \\
v(\{1,2\}) = c_2 & v(\{1,3\}) = c_3 & v(\{2,3\}) = c_3
\end{array} .
$$

Airport Game

Aeroporto

$$v(\emptyset) = 0 \qquad v(N) = c_3$$
$$v(\{1\}) = c_1 \quad v(\{2\}) = c_2 \quad v(\{3\}) = c_3$$
$$v(\{1,2\}) = c_2 \quad v(\{1,3\}) = c_3 \quad v(\{2,3\}) = c_3$$

	1	2	3
123	c_1	$c_2 - c_1$	$c_3 - c_2$
132	c_1	0	$c_3 - c_1$
213	0	c_2	$c_3 - c_2$
231	0	c_2	$c_3 - c_2$
312	0	0	c_3
321	0	0	c_3
Shapley	$\frac{2c_1}{6}$	$\frac{3c_2-c_1}{6}$	$\frac{6c_3-3c_2-c_1}{6}$

Airport Game

$$
\begin{array}{ccc}
v(\emptyset) = 0 & & v(N) = c_3 \\
v(\{1\}) = c_1 & v(\{2\}) = c_2 & v(\{3\}) = c_3 \\
v(\{1,2\}) = c_2 & v(\{1,3\}) = c_3 & v(\{2,3\}) = c_3
\end{array}
$$

Indice di Shapley

$$\sigma_i = (\frac{c_1}{3}, \frac{c_2}{2} - \frac{c_1}{6}, c_3 - \frac{c_2}{2} - \frac{c_1}{6})$$

- conveniente per ognuno
- efficiente
- simmetrico

Taxi

Tre amici vogliono dividere una corsa in taxi per tornare a casa, i costi per ogni possibile gruppo sono:

Ale = 10€
Bob = 10€
Chiara = 14€
Tutti insieme = 20€

Ale&Bob = 12€
Ale&Chiara = 18€
Bob&Chiara = 18€

Qual è il gioco associato? Quanto dovrebbe pagare ognuno?

Taxi

$$
\begin{array}{ccc}
v(\emptyset) = 0 & & v(N) = 20 \\
v(\{A\}) = 10 & v(\{B\}) = 10 & v(\{C\}) = 14 \\
v(\{A, B\}) = 12 & v(\{A, C\}) = 18 & v(\{B, C\}) = 18
\end{array}
.
$$

	A	B	C
ABC	10	2	8
ACB	10	2	8
BAC	2	10	8
BCA	2	10	8
CAB	4	2	14
CBA	2	4	14
Shapley	**30/6**	**30/6**	**60/6**

Ale: 5€ Bob: 5€ Chiara: 10€