

In Action With Math

Competizione e Strategia - Teoria dei Giochi

Roberto Lucchetti - Giulia Bernardi

Politecnico di Milano
www.gametheory.polimi.it

11 novembre 2015

Cows&Candies

Ci sono tre allevatori le cui mucche pascolano su un terreno comune formato da 12 campi. Ogni mattina ciascun allevatore decide quante delle sue sei mucche far uscire a pascolare. Ogni mucca occupa un campo e tutte le mucche pascolano sui campi rimasti liberi brucando l'erba. Ovviamente più mucche ci sono, meno erba rimane per ciascuna di loro.

A fine giornata il contadino munge le mucche e ogni mucca gli permette di produrre tanti litri di latte quanti sono i campi rimasti liberi quel giorno.

Quante mucche fareste uscire ogni mattina per aumentare il più possibile la vostra produzione di latte?

Tre giocatori.

x_1 = mucche di 1

x_2 = mucche di 2

x_3 = mucche di 3

$X = x_1 + x_2 + x_3$ campi occupati

$g_1 = (12 - X) \cdot x_1$ latte prodotto da 1

$g_2 = (12 - X) \cdot x_2$ latte prodotto da 2

$g_3 = (12 - X) \cdot x_3$ latte prodotto da 3

Problema

Scegliere x_1, x_2, x_3 in modo che g_1, g_2, g_3 siano il più grande possibile.

Proviamo a giocare!



Proviamo a giocare!



Ultimo tentativo

Ogni allevatore verrà premiato con un numero di caramelle uguale ai litri di latte prodotto.

Non esiste collaborazione tra i giocatori.

- dilemma del prigioniero
- gioco dei tre politici
- roulette russa
- scacchi, dama
- cows&candies

Come abbiamo risolto questi giochi?

Gioco in forma strategica

Due o più giocatori con un numero finito di mosse a disposizione. Per ogni possibile esito del gioco ci sono dei valori assegnati a ciascun giocatore.

Possiamo descriverlo usando:

- insieme N dei giocatori
- insieme X_i delle strategie del giocatore $i \in N$
- funzione di utilità di ogni giocatore f_i

Dilemma del prigioniero

Due persone vengono sospettate di aver commesso un reato molto grave. Il giudice fa ad entrambi questa proposta: se entrambi confesseranno avranno 5 anni in prigione per scontare la pena. Se confessa solo uno solo dei due, il primo sarà libero e il secondo sconterà una pena di 9 anni. Se nessuno dei due confessa, verranno accusati di reati minori e staranno in carcere per 2 anni.

Dilemma del prigioniero

Due persone vengono sospettate di aver commesso un reato molto grave. Il giudice fa ad entrambi questa proposta: se entrambi confesseranno avranno 5 anni in prigione per scontare la pena. Se confessa solo uno solo dei due, il primo sarà libero e il secondo sconterà una pena di 9 anni. Se nessuno dei due confessa, verranno accusati di reati minori e staranno in carcere per 2 anni.

	<i>C</i>	<i>NC</i>
<i>C</i>	(5, 5)	(0, 9)
<i>NC</i>	(9, 0)	(2, 2)

$X = Y = \{ \textit{Confessare}, \textit{NonConfessare} \}$

L'esito del gioco è rappresentato dagli anni di prigione.

Due giocatori

Il primo giocatore gioca la strategia x , il secondo giocatore gioca la strategia y .

Se $f(x, y) = a$ e $g(x, y) = b$

allora il valore assegnato al primo giocatore è a , al secondo giocatore è b .

$$x \rightarrow \left(\begin{array}{c} y \\ \downarrow \\ (a, b) \end{array} \right)$$

Give me Money

Due giocatori, ognuno deve scrivere un messaggio segreto scegliendo tra

- dammi 1000 euro
- dai all'altro concorrente 4000 euro.

Il presentatore legge i messaggi e fa quello che c'è scritto.

Cosa scrivereste?

$$\begin{pmatrix} (1000, 1000) & (5000, 0) \\ (0, 5000) & (4000, 4000) \end{pmatrix}$$

Strategie dominate

Un giocatore ha una strategia **dominata** x se qualsiasi sia la strategia degli altri giocatori, esiste una strategia x_1 che gli permette di guadagnare di più rispetto alla strategia x . Si dice che x_1 domina x .

Se la strategia x dominata è del primo giocatore, avremo

$$f(x_1, y) > f(x, y)$$

per ogni strategia y del secondo giocatore.

Battaglia dei sessi

Una coppia deve decidere se andare al cinema o a teatro, il primo giocatore preferisce il cinema, il secondo il teatro anche se entrambi preferiscono uscire insieme all'uscire da soli.

$$\begin{pmatrix} (3, 2) & (1, 1) \\ (0, 0) & (2, 3) \end{pmatrix}$$

Definizione (Equilibrio di Nash)

Dato il gioco $\{X, Y, f, g\}$ tra due giocatori diremo che la coppia di strategie (\bar{x}, \bar{y}) è un equilibrio di Nash se

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \text{ per ogni } x \in X$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \text{ per ogni } y \in Y$$

Nessuno dei due giocatori ha incentivo a giocare una strategia diversa se l'altro giocatore sta giocando la strategia di equilibrio

Definizione (Equilibrio di Nash)

Dato il gioco $\{X, Y, f, g\}$ tra due giocatori diremo che la coppia di strategie (\bar{x}, \bar{y}) è un equilibrio di Nash se

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \text{ per ogni } x \in X$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \text{ per ogni } y \in Y$$

Nessuno dei due giocatori ha incentivo a giocare una strategia diversa se l'altro giocatore sta giocando la strategia di equilibrio

Teorema (Nash)

Ogni gioco ammette almeno un equilibrio di Nash in strategie pure o miste.

Il primo giocatore sceglie un numero tra 0 e 1, il secondo sceglie un numero tra 0 e 2. La somma dei due numeri è la quantità che il secondo giocatore deve pagare al primo.

$$X = [0, 1] \text{ e } Y = [0, 2]$$

$$f(x, y) = x + y$$

Se foste il primo giocatore, cosa giochereste? E se foste il secondo?

Due amici hanno comprato due oggetti identici, mentre tornano a casa un signore in metro inavvertitamente li rompe entrambi. Il signore è disposto a ripagare gli oggetti, ma non sa quale sia il loro costo anche se lo stima tra i 10 e i 13 euro.

Decide di fare questa proposta: "Scrivete su un foglio il costo dell'oggetto. Se scriverete lo stesso numero, vuol dire che quello è il costo dell'oggetto e vi darò quel valore. Se invece scriverete due numeri diversi, premierò chi è stato onesto e ha scritto il numero più basso dandogli 4 euro in più della cifra che ha scritto, mentre darò 4 euro in meno a chi mi ha imbrogliato e ha scritto il numero più alto."

Come rappresentare questo gioco?

Qual è l'equilibrio di Nash?

Una coppia di amici sta andando a caccia. Ognuno può decidere se andare a cacciare un cervo o una lepre, ogni cacciatore può catturare da solo la lepre, invece per catturare il cervo deve esserci anche il suo compagno. Ovviamente è meglio catturare un cervo di una lepre.

Qual è l'equilibrio di Nash?

$$\begin{pmatrix} (5, 5) & (0, 1) \\ (1, 0) & (1, 1) \end{pmatrix}$$

Pari o dispari

Come si può rappresentare il gioco “pari o dispari”? E qual è la strategia migliore per giocare?

Sasso Carta Forbice

Due giocatori devono scegliere contemporaneamente uno dei tre simboli e poi asso batte forbice, forbice batte carta e carta batte forbice.

Come si può rappresentare questo gioco? E qual è la strategia migliore per giocare?